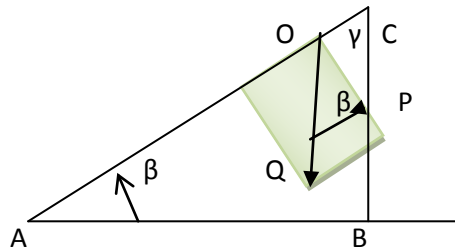


Studio del rotolamento, senza strisciamento, di una sfera e di un cilindro su piano inclinato.

Obiettivi da conseguire:

1. Misura della velocità di traslazione del centro di massa
2. Misura della velocità angolare e della frequenza di rotazione della sfera e del cilindro sul piano
3. Calcolo della forza di attrito volvente e determinazione del coefficiente di attrito
4. Calcolo dell'accelerazione angolare e del momento di inerzia della sfera e del cilindro.

a) Predisporre il piano inclinato in modo da poter misurare gli angoli di inclinazione .



Il triangolo OPQ è simile al triangolo ABC per cui l'angolo QOP è uguale all'angolo CAB

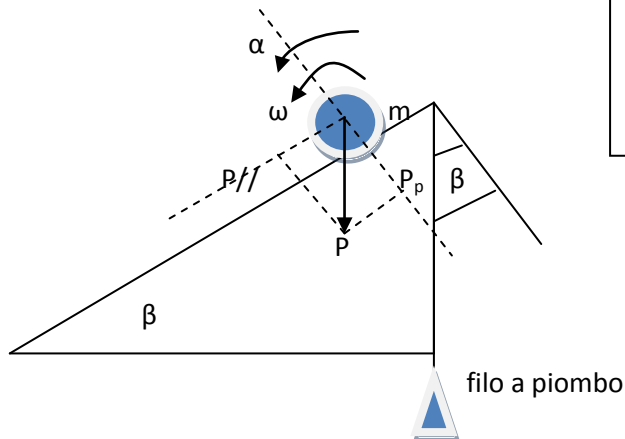
$$\gamma + \beta + 90 = 180$$

Montando una staffa con un goniometro con centro in O e con un filo a piombo possiamo misurare gli angoli di inclinazione del piano.

Predisporre il materiale occorrente:

1. Piano inclinato con staffa e goniometro
2. Sfera di alluminio e sfera di ottone, cilindro di alluminio e ottone
3. Bilancia
4. Cronometro e stroboscopio
5. Calibro
6. metro

Obiettivo : determinare l'accelerazione angolare, l'accelerazione a_x , la forza di attrito e la velocità angolare , il coefficiente di attrito , la frequenza di rotazione della sfera e del cilindro



Predisporre le apparecchiature come in figura, misurare l'angolo di inclinazione del piano, la massa della sfera il suo raggio

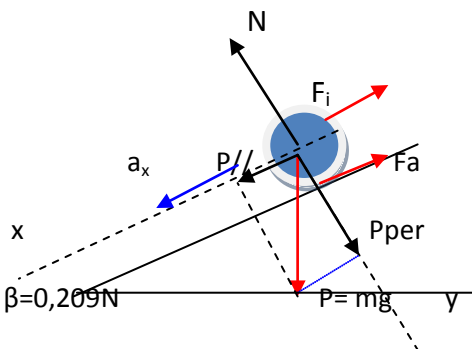
1. Il piano inclinato ha angolo di inclinazione $\beta=11^\circ$
2. massa della sfera alluminio e diametro $m=21,7\text{gr}$ $\phi=24,82\text{mm}$
3. massa della sfera di ottone e diametro $m=66,9\text{gr}$ $\phi= 24,72\text{mm}$
4. massa del cilindro alluminio $m=31,1\text{gr}$ $\phi=24,91\text{mm}$
5. massa del cilindro di ottone $m=120,5\text{gr}$ $\phi=29,95\text{mm}$

Sfera alluminio

$m=21,7\text{gr}$ $\phi=24,82\text{mm}$

$$P_{//}=m \cdot g \cdot \sin(\beta)=0,041\text{N}$$

$$P_{\perp}=m \cdot g \cdot \cos \beta=0,209\text{N}$$



Per la traslazione lungo il piano , asse x

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - F_a - m \cdot a_x = 0$$

Per la traslazione lungo l'asse y

$$N - P_{\perp} = 0 \quad N = P_{\perp} = 0,209\text{N}$$

La forza di attrito è responsabile della rotazione della sfera generando un momento $M = F_a \cdot r$.

$$F_a \cdot r = I \cdot \alpha \quad a_x = r \cdot \alpha \quad \alpha = a_x / r \quad F_a = \frac{I \cdot \alpha}{r} = I \cdot \frac{a_x}{r \cdot r}$$

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - I \cdot \alpha / r = m \cdot a_x$$

$$I = \frac{2}{5} m \cdot r^2 = 1,337 \cdot 10^{-6} \text{ Kg m}^2$$

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot a_x / r^2 = m \cdot a_x$$

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - \frac{2}{5} m \cdot a_x = m \cdot a_x$$

$$m \cdot g \cdot \sin \beta = a_x \cdot (m + \frac{2}{5} m) = m \cdot a_x \cdot (1 + \frac{2}{5})$$

$$g \sin \beta = a_x (7/5)$$

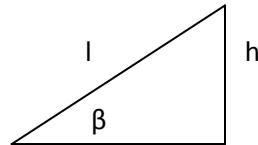
$$a_x = \frac{5}{7} * g * \sin(\beta) = 1,337 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = a_x / r = 107,738 \text{ rad/s}^2$$

$$F_a = I \alpha / r = 0,012 \text{ N}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia per i sistemi non conservativi abbiamo:

$$m g h - (\frac{1}{2} m V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2) = F_a l$$



$$h = l \sin \beta \quad l = h / \sin \beta$$

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} m V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad V_{CM} = \omega r$$

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} \omega^2 (m r^2 + I)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m * g * h - \frac{F_a * h}{\sin \beta}}{\frac{1}{2} m * r^2 + \frac{1}{2} I}} = 83,338 \text{ rad/sec}$$

$$V_{CM} = \omega r = 83,338 \text{ rad/sec} * 0,012 \text{ m} = 1,034 \text{ m/s}$$

$$V_{cms} = a_x t = 1,337 \text{ m/s}^2 * 0,94 = 1,257$$

Sfera ottone

$$T_s = 0,84 \text{ sec}$$

Cilindro alluminio

$$T_s = 0,72 \text{ s}$$

Cilindro ottone

$$T_s = 0,69$$

$$\text{La frequenza di rotazione della sfera sar\`a: } f = \frac{\omega}{2 * \pi} = 13,264 \text{ Hz}$$

Calcolo del coefficiente di attrito volvente piano alluminio e sfera alluminio

$$P // = m g \sin \beta = 0,041 \text{ N} \quad P \uparrow = m g \cos \beta = 0,21 \text{ N}$$

$$F_a = \mu v P \quad \mu v = \frac{F_a}{P} = 0,056$$

Calcolo di V_{CM}

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} m V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad V_{CM} = \omega r$$

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} m V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I V_{CM}^2 / r^2$$

$$m g h - F_a h / \sin \beta = \frac{1}{2} (m + \frac{1}{2} I / r^2) V_{CM}^2$$

$$V_{CM}^2 = \frac{mgh - \frac{F_a h}{\sin \beta}}{\frac{1}{2} (m + \frac{1}{2} \frac{I}{r^2})}$$

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{mgh - \frac{F_a h}{\sin \beta}}{\frac{1}{2} (m + \frac{1}{2} \frac{I}{r^2})}}$$

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$M := 21.7 \cdot 10^{-3} \cdot \text{kg}$$

$$\theta := 11 \cdot \text{deg}$$

$$l := 0.56 \cdot \text{m}$$

$$h := l \cdot \sin(\theta)$$

$$h = 0.107 \text{ m}$$

$$r := \frac{24.82 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot r$$

$$r = 0.012 \text{ m}$$

$$a := g \cdot \frac{5}{7} \cdot \sin(\theta)$$

$$a = 1.337 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$L := \frac{h}{\sin(\theta)}$$

$$L = 0.56 \text{ m}$$

$$\alpha := \frac{a}{r}$$

$$\alpha = 107.738 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$I := \frac{2 \cdot M \cdot r^2}{5}$$

$$I = 1.337 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Forza di attrito volvente

$$F_a := I \cdot \frac{\alpha}{r}$$

$$F_a = 0.012 \text{ N}$$

$$\omega := \sqrt{\frac{\left(M \cdot g \cdot h - \frac{F_a \cdot h}{\sin(\theta)} \right)}{\left(M \cdot \frac{l \cdot r^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot I \right)}}$$

$$\omega = 83.338 \text{ Hz}$$

$$V_{cm} := \omega \cdot r$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 13.264 \text{ Hz} \quad \text{frequenza di rotazione della sfera}$$

$$V_{cm} = 1.034 \frac{m}{s}$$

$$t_m := 0.94 \cdot s$$

$$V_{cmis} := a \cdot t_m$$

$$V_{cmis} = 1.257 \frac{m}{s}$$

Calcolo della velocità di traslazione del centro di massa della sfera lungo il piano inclinato

$$V_{cm} := \sqrt{\frac{M \cdot h \cdot g - F_a \cdot \frac{h}{\sin(\theta)}}{\left(\frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{r^2}\right)}}$$

$$V_{cm} = 1.034 \frac{m}{s} \quad \text{Velocità di traslazione del centro di massa}$$

Calcolo del coefficiente di attrito volvente

$$P_{perp} := M \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$$P_{par} := M \cdot g \cdot \sin(\theta)$$

$$P_{par} = 0.041 \text{ N}$$

$$P_{perp} = 0.209 \text{ N}$$

$$N = P_{perp}$$

$$\mu := \frac{F_a}{P_{perp}}$$

$$\mu = 0.056$$

Coefficiente di attrito volvente

Cilindro ottone

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad M := 120.5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{kg}$$

$$\theta := 11 \cdot \text{deg}$$

$$l := 0.56 \cdot \text{m} \quad h := l \cdot \sin(\theta)$$

$$h = 0.107 \text{ m}$$

$$r := \frac{29.95 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot \text{m}$$

$$r = 0.015 \text{ m}$$

-----■

$$a := g \cdot \frac{5}{7} \cdot \sin(\theta)$$

$$a = 1.337 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$L := \frac{h}{\sin(\theta)} \quad L = 0.56 \text{ m}$$

$$\alpha := \frac{a}{r}$$

$$\alpha = 89.284 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$I := \frac{1 \cdot M \cdot r^2}{2}$$

$$I = 1.351 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Forza di attrito volvente

$$F_a := I \cdot \frac{\alpha}{r}$$

$$F_a = 0.081 \text{ N}$$

$$\omega := \sqrt{\frac{\left(M \cdot g \cdot h - \frac{F_a \cdot h}{\sin(\theta)} \right)}{\left(M \cdot \frac{1 \cdot r^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot I \right)}}$$

$$\omega = 63.298 \text{ Hz}$$

$$V_{cm} := \omega \cdot r$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 10.074 \text{ Hz} \quad \text{frequenza di rotazione del cilindro alluminio}$$

$$V_{cm} = 0.948 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{teorica}$$

$$t_m := 0.69 \cdot \text{s}$$

$$V_{cmis} := a \cdot t_m$$

$$V_{cmis} = 0.923 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{sperimentale}$$

Calcolo della velocità di traslazione del centro di massa della sfera lungo il piano inclinato

$$V_{cm} := \sqrt{\frac{M \cdot h \cdot g - F_a \cdot \frac{h}{\sin(\theta)}}{\left(\frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{r^2} \right)}}$$

$$V_{cm} = 0.948 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Velocità di traslazione del centro di massa}$$

Calcolo del coefficiente di attrito volvente

$$P_{\text{perp}} := M \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad P_{\text{par}} := M \cdot g \cdot \sin(\theta)$$

$$P_{\text{par}} = 0.226 \text{ N} \quad P_{\text{perp}} = 1.16 \text{ N}$$

$$N = P_{\text{perp}}$$

$$\mu := \frac{F_a}{P_{\text{perp}}}$$

$$\mu = 0.069 \quad \text{Coefficiente di attrito volvente}$$

Cilindro alluminio

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad M := 31.1 \cdot 10^{-3} \cdot \text{kg}$$

$$\theta := 11 \cdot \text{deg}$$

$$l := 0.56 \cdot \text{m} \quad h := l \cdot \sin(\theta)$$

$$h = 0.107 \text{ m}$$

$$r := \frac{24.91 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot r$$

$$r = 0.012 \text{ m}$$

$$a := g \cdot \frac{5}{7} \cdot \sin(\theta)$$

$$a = 1.337 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$L := \frac{h}{\sin(\theta)}$$

$$L = 0.56 \text{ m}$$

$$\alpha := \frac{a}{r}$$

$$\alpha = 107.349 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$I := \frac{1 \cdot M \cdot r^2}{2}$$

$$I = 2.412 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Forza di attrito volvente

$$F_a := I \cdot \frac{\alpha}{r}$$

$$F_a = 0.021 \text{ N}$$

$$\omega := \sqrt{\frac{\left(M \cdot g \cdot h - \frac{F_a \cdot h}{\sin(\theta)} \right)}{\left(M \cdot \frac{1 \cdot r^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot I \right)}}$$

$$\omega = 76.105 \text{ Hz}$$

$$V_{cm} := \omega \cdot r$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 12.112 \text{ Hz} \quad \text{frequenza di rotazione del cilindro alluminio}$$

$$V_{cm} = 0.948 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{teorica}$$

$$t_m := 0.72 \cdot \text{s}$$

$$V_{cmis} := a \cdot t_m$$

$$V_{cmis} = 0.963 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{sperimentale}$$

Calcolo della velocità di traslazione del centro di massa della sfera lungo il piano inclinato

$$V_{cm} := \sqrt{\frac{M \cdot h \cdot g - F_a \cdot \frac{h}{\sin(\theta)}}{\left(\frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{r^2} \right)}}$$

$$V_{cm} = 0.948 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Velocità di traslazione del centro di massa}$$

Calcolo del coefficiente di attrito volvente

$$P_{\text{perp}} := M \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$$P_{\text{par}} := M \cdot g \cdot \sin(\theta)$$

$$P_{\text{par}} = 0.058 \text{ N}$$

$$P_{\text{perp}} = 0.299 \text{ N}$$

$$N = P_{\text{perp}}$$

$$\mu := \frac{F_a}{P_{\text{perp}}}$$

$$\mu = 0.069$$

Coefficiente di attrito volvente